

Обобщённое уравнение гравитационного взаимодействия

Островский Н.В.*

(Получена 12 июня 2020; одобрена 18 июня 2020; опубликована 28 июня 2020)

© Островский Н.В. 2020. Эта статья размещена в открытом доступе на Scicom.ru

Аннотация. В работе рассмотрен ряд явлений, выходящий за рамки закона всемирного тяготения Ньютона, сформулированного им для парных взаимодействий. Все эти явления могут быть описаны с использованием нового закона тяготения: в системе n тел, тело 1 будет тяготеть к телу 2, если отношение массы тела 2 к кубу расстояния между телом 1 и телом 2 больше, чем аналогичные отношения между массами и расстояниями для других тел.

Ключевые слова. Закон всемирного тяготения; Гравитационная задача трех и четырех тел; Приливные гравитационные эффекты.

Generalized Equation of Gravitational Interaction

Ostrovskiy N.V.

Abstract. The article considers a number of phenomena that go beyond Newton's law of universal gravitation, formulated by him for pair interactions. All these phenomena can be described using the new law of gravity: in the system of n bodies, body 1 will gravitate toward body 2 if the ratio of the mass of body 2 to the cube of the distance between body 1 and body 2 is greater than the similar relations between masses and distances for others bodies.

Keywords. Law of universal gravitation; Gravitational problems of three and four bodies; Tidal gravitational effects.

Введение

С тех пор, как Исаак Ньютон опубликовал закон всемирного тяготения, прошло почти 350 лет. В классической формулировке закон Ньютона распространяется на взаимодействие двух тел. Предпринималось множество попыток распространить этот закон на более сложные системы, но их, навряд ли, можно признать удовлетворительными. Ещё в 2003 г. автором этой статьи было найдено уравнение, позволившее описать движение Луны вокруг Земли. Затем последовала серия работ, в которых были рассмотрены другие задачи трёх и четырёх тел. В данной статье дано обобщение накопленного материала и представлена попытка теоретического обоснование экспериментально найденного уравнения.

1. Закон Ньютона

Легенда гласит, что Исаака Ньютона на закон всемирного тяготения натолкнуло яб-

локо, упавшее ему на голову с дерева. Эту легенду придумала его племянница, живо интересовавшаяся делами дяди [1, с.7]. В действительности, формулировка данного закона во времена Ньютона, что называется, носилась в воздухе. Но нужно было как-то разрешить парадокс Луны. Дело в том, что если рассчитать силы притяжения Луны к Земле и к Солнцу по используемому ныне уравнению [2, с. 54]:

$$F_{G,2} = G \frac{Mm}{r^2}, \quad (1)$$

где G – универсальная гравитационная постоянная, M и m – массы взаимодействующих тел, r – расстояние между телами, то окажется, что Луна притягивается к Солнцу сильнее, чем к Земле. Т. е. она должна обращаться вокруг Солнца, а не вокруг Земли. Вероятно, именно это удерживало современников Ньютона (например, Р. Гука) от публикации приведённого выше уравнения.

* Островский Николай Владимирович. К.т.н., ветеран труда, г. Кирово-Чепецк, Россия.
E-mail: onv123@gmail.com

В изданном в Лондоне в 1686 г. фундаментальном труде «Математические начала натуральной философии» И. Ньютон сформулировал закон всемирного тяготения так [3, с. 518-519]: «Тяготение существует ко всем телам вообще и пропорционально массе каждого из них... Если вещество двух шаров, тяготеющих друг к другу, в равных удаленьях от их центров однородно, то притяжение каждого шара другим обратно пропорционально квадрату расстояния между центрами их». Парадокс Луны Ньютон разрешил следующим образом [3, с. 528]: «Общий центр тяжести Земли и Луны движется по эллипсу вокруг Солнца, находящемуся в его фокусе, и описывает проводимым к нему радиусом площади, пропорциональные времени, Земля же обращается вокруг этого центра тяжести месячными движениями».

Но эта гипотеза противоречит астрономическим наблюдениям. Рассмотрим рис. 1. На нем буквой E обозначен центр Земли, буквой M – центр Луны, BB' – ось собственного вращения Земли и AA' – ось, проходящая через центр масс системы Земля-Луна, C – произвольная точка на поверхности Земли.

Характер движения Луны по небесной сфере, прежде всего время нахождения Луны над линией горизонта, определяется широтой точки C ($\angle B'EC$), скоростью вращения Земли вокруг собственной оси и углом между осью вращения Земли и радиус-вектором Луны относительно Земли ($\angle B'EM$). Положение оси собственного вращения Земли в пространстве является фиксированным как следствие закона сохранения момента количества вращательного движения (гироскопический эффект). Когда Земля обращается вокруг Солнца угол между радиус-вектором Земли относительно Солнца и осью вращения Земли постоянно меняется и, как следствие, постоянно меняется долгота дня: от минимального в день зимнего солнцестояния (для северного полушария), когда угол принимает максимальное значение, до минимального в день летнего солнцестояния, когда угол принимает минимальное значение. В день весеннего (осеннего) равноденствия угол равен 90° . Если исходить из того, что Луна и Земля обращаются вокруг общего центра масс (отрезок AA'), то в этом случае угол $B'EM$ должен быть фиксированным. То есть длительность лунного «дня» должна быть для каждой широты

величиной постоянной. Но в действительности это не так: время восхода и захода Луны меняются день ото дня – в этом каждый может убедиться на собственном опыте. Значит предположение Ньютона неверно. С общетеоретических позиций некорректность рассуждения Ньютона была в том, что он понятие «центра тяжести» для системы тел, связанных вещественно, перенёс на систему тел, связанных лишь гравитационным взаимодействием. Как показывают данные астрономических наблюдений, свойства такой системы обладают определёнными отличиями.

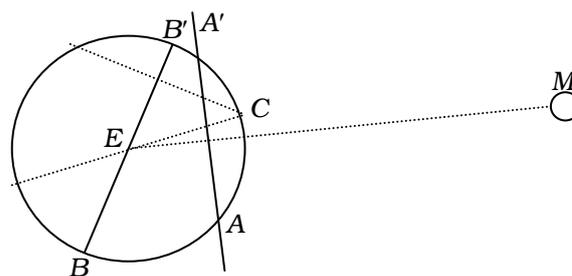


Рис. 1. Обращение Земли и Луны вокруг общего центра масс

И, тем не менее, с исторической точки зрения Ньютон, отбросивший парадокс Луны, был прав. Анри Пуанкаре приписывают фразу о том, что если бы инструменты Тихо Браге (построившего таблицы наблюдений, использованные Кеплером) были в десять раз точнее, то мы никогда не имели бы ни Кеплера, ни Ньютона, ни астрономии. Для учёного очень важно уметь в ворохе фактов выделить главное. Тогда появляется научный закон – в противном случае мы останавливаемся на стадии феноменологии.

2. Попытки модификации уравнения Ньютона

Закон Ньютона вызывал у некоторых учёных определённый скепсис. Другие, напротив, искали более полного подтверждения этого закона. Леонард Эйлер в работе «О причине неравенства движения Юпитера и Сатурна» писал: «...Остаётся только узнать, подчиняется ли эта притягательная сила закону обратной пропорциональности, как предполагал Ньютон, или нет. Действительно, раз этот закон столь плохо соответствовал движению апогея Луны, как это до сих пор приходилось думать, то мы были в праве сомневаться, что ему подчиняются силы, с которыми небесные тела действуют друг на друга. Но

с тех пор как г-н Клеро сделал важное открытие¹, что движение апогея Луны вполне согласуется с ньютоновской гипотезой закона притяжения уже не остаётся ни малейшего сомнения в справедливости закона обратной пропорциональности квадратам расстояний...» [4]. К сожалению, в современных издании по небесной механике открытие Клеро не обсуждается.

Как бы то ни было, Эйлер посвятил ряд своих работ модификации закона Ньютона. В мемуаре № 70 «Исследование общих свойств движения небесных тел» он сформулировал эту задачу следующим образом: «Когда центральная сила, действующая на тело, почти что обратно пропорциональна квадрату расстояния, найти движение тела в предположении, что его орбита мало отличается от круговой». При этом, силу, действующую на тело, он принимает равной:

$$mc^3/r^2 + R, \quad (2)$$

где m и c – некоторые постоянные, а R – функция от r . (2)

Особенно подробно изучались два случая, когда

$$R = \mu c \left(\frac{c}{r} \right)^v \quad (3)$$

и когда

$$\frac{mc^3}{r^2} + R = mc \left(\frac{c}{r} \right)^{2+\mu}, \quad (4)$$

где μ и ν – некоторые постоянные величины, причём μ очень мало [4].

Но эти изыскания не принесли Эйлеру успеха.

В связи с освоением околоземного космического пространства точный расчёт силы тяготения приобрёл практическое значение. В настоящее время эта задача решается путём введения в уравнение Ньютона (1) возмущающей функции, учитывающей воздействие внешних тел. Например, для спутника Земли возмущающая функция может иметь вид [5, с. 212]:

$$R = \frac{Gm_M}{r_M} \left(\frac{r}{r_M} \right)^2 P_2 \cos \alpha_M + \frac{Gm_S}{r_S} \left(\frac{r}{r_S} \right)^2 P_2 \cos \alpha_S, \quad (5)$$

где m_M и m_S – массы Луны и Солнца, r – радиус-вектор спутника относительно Земли, r_M и r_S – расстояние от спутника до Луны и Солнца соответственно, P_2 – полином Лежандра второй степени, α_M и α_S – углы между радиус-вектором спутника относительно Земли и радиус-векторами спутника относительно Луны и Солнца соответственно.

3. Динамическая модель орбитального движения небесных тел

Эйлер, как, его современники и последователи, разрабатывая модели движения небесных тел, составлял систему дифференциальных уравнений, а затем проводил их интегрирование. При этом найти точное решение этих уравнений оказывается невозможным. У современных учёных появилось новое орудие интеллектуального труда – электронные вычислительные машины. Это позволяет проводить численное интегрирование с любой степенью точности. Но использование ЭВМ позволяет и отказаться от данного метода вообще, используя последовательное вычисление орбитальных параметров небесного тела [6, 7].

Согласно Борелли (1666 г.) условием кругового движения планет является равенство силы тяготения планеты к Солнцу центробежной силе [8, с. 141]. Сила тяготения может описываться законом Ньютона или каким-то иным. Величина центробежной силы равна:

$$F_C = mv_C^2/r, \quad (6)$$

где v_C – круговая скорость, а r – радиус кривизны.

Ещё одним условием кругового движения является постоянство момента количества движения тела (углового момента) [9]:

$$\vec{K} = m \cdot \vec{v} \times \vec{r}, \quad (7)$$

если на тело действуют только центральные силы.

Если равенство между силой тяготения и центробежной силой нарушается, то на тело начинает действовать радиальное ускорение и орбита тела становится эллиптической или

¹ Сочинение Клеро «Теория Луны, выведенная из одного только принципа притяжения, обратно пропорционального квадратам расстояний»; премировано Петербургской академией в 1852 г.

параболической. Приняв за положительное направление вектора ускорения к центральному телу получаем:

$$a_R = a_G - a_C. \quad (8)$$

Радиальное ускорение определяет движение тела вдоль радиус-вектора:

$$v_{R,t} = v_{R,t-\Delta t} + a_{R,t}\Delta t, \quad (9)$$

$$r_t = r_{t-\Delta t} + v_{R,t}\Delta t, \quad (10)$$

$$v_{C,t} = \frac{K/m}{r_t}. \quad (11)$$

Используя уравнения (6), (9)–(11) и уравнение для нахождения ускорения силы тяготения мы можем последовательно, с шагом Δt рассчитывать траекторию движения небесного тела (см. рис. 2).

Гипотеза И. Ньютона о том, что Земля и Луна обращаются вокруг общего центра тяжести, получила своё развитие в механике и астрономии. Если Ньютон полагал, что пара Земля-Луна и другие планеты обращаются вокруг Солнца, то в настоящее время в астрономии господствует теория, согласно которой все тела Солнечной системы движутся вокруг её центра масс. На этой основе разработаны эфемериды, т.е. алгоритмы расчётов положения небесных тел Солнечной системы для произвольных моментов времени, в ведущих научных центрах, в т.ч. в институте прикладной астрономии РАН (серии EPM), Jet Propulsion Laboratory NASA (серии DE), Observatoire Cote d'Azur (серии INPOP) [11].

Центр инерции (центр масс) [12, с. 843–844] – это геометрическая точка, положение которой характеризует распределение масс в теле или механической системе.

Координаты центра инерции определяются формулами:

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{M}, y_C = \frac{\sum m_k y_k}{M}, z = \frac{\sum m_k z_k}{M}, \quad (12)$$

где m_k – массы материальных точек, образующих систему, x_k, y_k, z_k – координаты этих точек, $M = \sum m_k$ – масса системы.

Понятие о центре инерции отличается от понятия о центре тяжести только тем, что последнее имеет смысл только для твёрдого тела, находящегося в однородном поле тяжести; понятие же о центре инерции не связано ни с каким силовым полем и имеет смысл для любой механической системы. Считается, что при движении механической системы её

центр инерции движется так, как двигалась бы материальная точка, имеющая массу равную массе системы, и находящаяся под действием всех внешних сил, приложенных к системе.

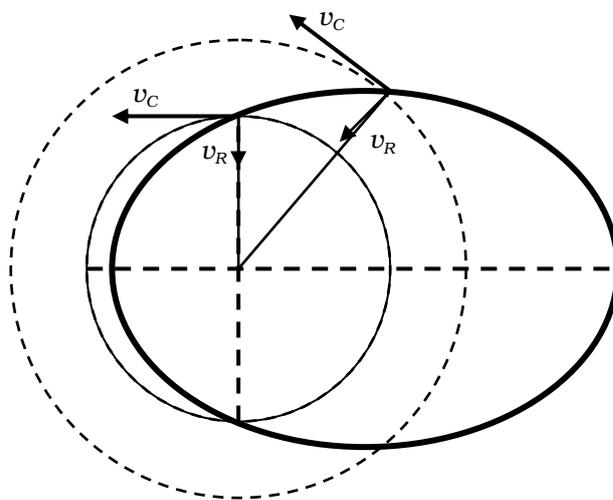


Рис. 2. Движение тела по эллиптической орбите [10, с. 16]

Из формул (12) следует, что чем более удалена планета от центра Солнца, тем сильнее её влияние на положение центра инерции. Получается, что известное правило рычага мы распространяем на систему тел, связанных лишь гравитационным взаимодействием. В первом случае действуют правила сложения моментов сил (теорема Вериньона [12, с. 68]). Во втором случае законы взаимодействия до конца не изучены.

Если мы воспользуемся барицентрическими эфемеридами [13], то окажется, что для Юпитера угловое расстояние между двумя последовательными перигелиями составляет $358,971^\circ$, в то время как для гелиоцентрической системы [14] оно составит $359,457^\circ$ (вместо искомого $360,005^\circ$).

4. Задача трёх тел

Итак, воспользовавшись изложенной выше моделью, мы можем экспериментировать с видом уравнения, описывающего гравитационное взаимодействие между телами. Эти упражнения показали, что мы можем получить устойчивую орбиту Луны, если сила притяжения Луны к Земле вычисляется по уравнению [15]:

$$F_{G,3} = G \frac{m_E m_M}{r_{ME}^2} + G \frac{m_S m_M}{r_{MS}^3} r_{ME} \cos \alpha_{ES}, \quad (13)$$

где m_M , m_E , m_S – массы Луны, Земли и Солнца, r_{ME} , r_{MS} – расстояния от Луны до Земли и от Луны до Солнца, β – угол между r_{ME} и r_{MS} (см. рис. 3).

Лунная орбита имеет наклон к плоскости орбиты Земли (плоскости эклиптики). Причём положение плоскости лунной орбиты всё время изменяется в пространстве, так что линия узлов – линия пересечения плоскости орбиты Луны и плоскости эклиптики – совершает полный оборот за 18,61 лет. Детальное объяснение этого явления в литературе отсутствует. По-видимому, оно связано с гироскопическим эффектом. Мною было предложено следующее уравнение [16]:

$$\Delta Y = -\frac{Gr_{ME}m_S \sin \beta}{r_{MS}^3} \cdot \frac{\Delta t}{v_{c.t}} \cdot (1 + \sin i), \quad (14)$$

где Y – долгота восходящего узла, i – угол наклона плоскости орбиты спутника.

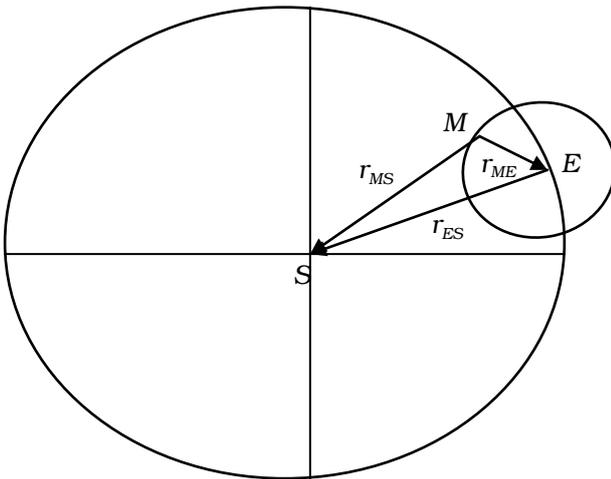


Рис. 3. Система Солнце – Земля – Луна

Результаты расчётов эфемерид Луны с использованием данной модели представлены в табл. 1. Как видно из таблицы ошибка в вычислении фазы Луны в течение первых двух лет расчётов не превышает $\pm 6^\circ$. Затем она начинает увеличиваться ввиду отставания модели от реального движения Луны. Но за весь период расчётов (18,61 лет) средняя расчётная скорость движения Луны отличается от реальной всего на $-0,2\%$ отн. Ошибка в вычислении скорости смещения линии узлов за тот же период (т.е. за период полного оборота линии узлов, равного 18,61 года [17, с. 213]) составила 2% . Вероятно, именно с этим и связана ошибка в вычислении фаз Луны. Наибольшее расхождение с данными астрономического календаря оказывается в случае

вычисления дат наступления апогея и перигея, достигающее четырёх суток.

Можно сказать вполне определённо, что при такой ошибке вычисления апогея и перигея ошибка в фазах Луны была бы быть значительно больше. Поэтому расхождения с астрономическим календарём можно отнести на счёт астрономической модели. Расхождения с данными астрономического календаря по радиусу орбиты Луны составляют около $1,5\%$ отн.

Вероятной причиной неполной адекватности модели данным астрономических наблюдений является игнорирование влияния Солнца на направление силы тяготения. Известно, что это ведёт к изменению направления ускорения силы тяжести у поверхности Земли. Логично предположить, что аналогичный эффект должен иметь место и при взаимодействии между небесными телами. Тем не менее, можно говорить о том, что модель даёт устойчивую орбиту Луны и позволяет получить относительно удовлетворительные результаты при вычислении её эфемерид, по крайней мере, на временном отрезке до 2 лет.

Аналогичные расчёты были выполнены для спутников Юпитера Пасифе [20], Синопе [21] и Карме [22]. Данные спутники имеют обратное (противоположное) по отношению к остальным спутникам направление движения и их орбиты выходят за границы сферы тяготения Юпитера, вычисляемой с помощью уравнения Ньютона (1). К сожалению, на момент публикации данных работ автор не имел достаточно полной информации об орбитальных элементах этих спутников. Это не позволило корректно определить начальные параметры расчётов и получить орбиты, со средними параметрами, соответствующими литературным данным. Тем не менее, моделирование движения спутников Юпитера на больших промежутках времени показало, что в каждом случае движение претерпевает эволюцию, после чего колебания параметров входят в определённые рамки, зависящие от начальных параметров движения (см. рис. 4, 5).

Более тщательный поиск позволил собрать из различных источников орбитальные элементы Ананке (см. таб. 2). Различия между ними весьма значительны, поскольку это средние значения и они должны зависеть от периодов осреднения. В литературе также

приводятся средние величины долготы восходящего узла и аргумента перицентра, но ни в одной из работ не обсуждается вращение линии узлов.

Таблица 1. Сопоставление расчётов эфемерид Луны с данными астрономического календаря

Дата	Явление [18, 19]	Результат расчётов	Отклонение
12.01.85, 4:00	Перигей	Начало расчётов	
13.01.85, 23:28	3-я четверть	Угол 269,98° Радиус 366990 км	- 0,02° - 4704 км
6.01.85, 6:00	Нисходящий узел	16.01.85, 4:00	-0,083 сут.
27.01.85, 9:00	Апогей	26.01.85, 7:35	-1,059 сут.
12.02.85, 7:58	3-я четверть	269,79° Радиус 365843 км	- 0,21° - 5481 км
04.05.85, 19:54	Полнолуние	Угол 174,12°	- 5,88°
05.05.85, 2:00	Нисходящий узел	05.05.85, 11:56 Угол 305,29°	0,414 сут. 0,61°
17.05.85, 0:00	Апогей	19.05.85, 6:59	2,291 сут.
19.05.85, 0:00	Восходящий узел	19.05.85, 4:49 Угол 124,54°	0,201 сут. 0,81°
19.05.85, 21:42	Новолуние	Угол -2,96°	-2,96°
28.10.85, 17:38	Полнолуние	Угол 177,04°	-2,96°
29.10.85, 2:00	Восходящий узел	29.10.85, 7:03 Угол 116,42°	0,211 сут. 0,01°
29.10.85, 22:00	Апогей	28.10.85, 10:14	-1,49 сут.
05.11.85, 20:07	3-я четверть	Угол 276,39°	+6,39°
11.11.85, 21:00	Нисходящий узел	11.11.85, 16:58 Угол 295,68°	-0,168 сут. +0,02°
12.11.85, 13:00	Перигей	08.11.85, 7:50	-4,215 сут.
12.11.85, 14:21	Новолуние	Угол 0,65°	+0,65°
03.10.86, 18:56	Новолуние	Угол 4,40°	+ 4,40°
04.10.86, 13:00	Нисходящий узел	04.10.86, 8:03 Угол 278,90°	-0,206 сут. +0,89°
17.10.86, 13:00	Восходящий узел	17.10.86, 20:48 Угол 276,79°	+0,325 сут. 1,37°
17.10.86, 19:22	Полнолуние	Угол 176,34°	-3,66°
23.08.03, 11:15	Полный оборот линии узлов	Угол 318,9° Угол поворота 89756°	+7,6° (2% отн.) -192° (0,2% отн.)

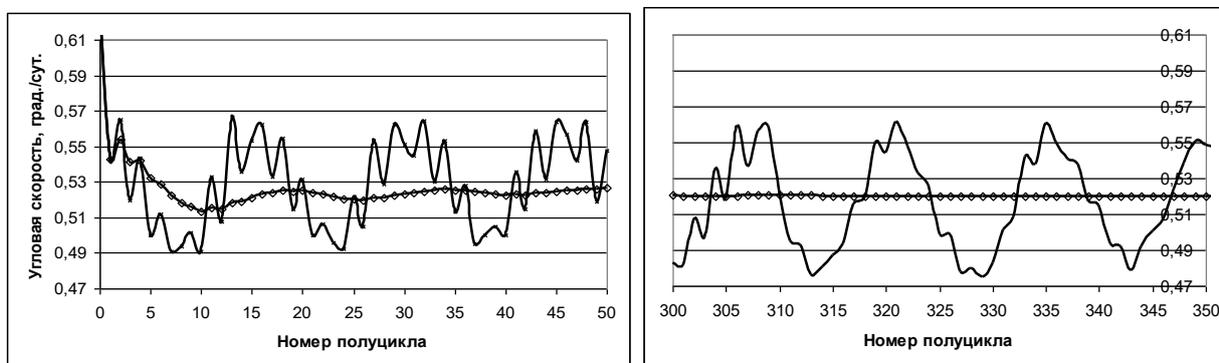


Рис. 4. Зависимость от времени (x) текущей (для данного полуцикла) и (◊) средней (за всё время расчётов) угловой скорости орбитального движения Карме [22]

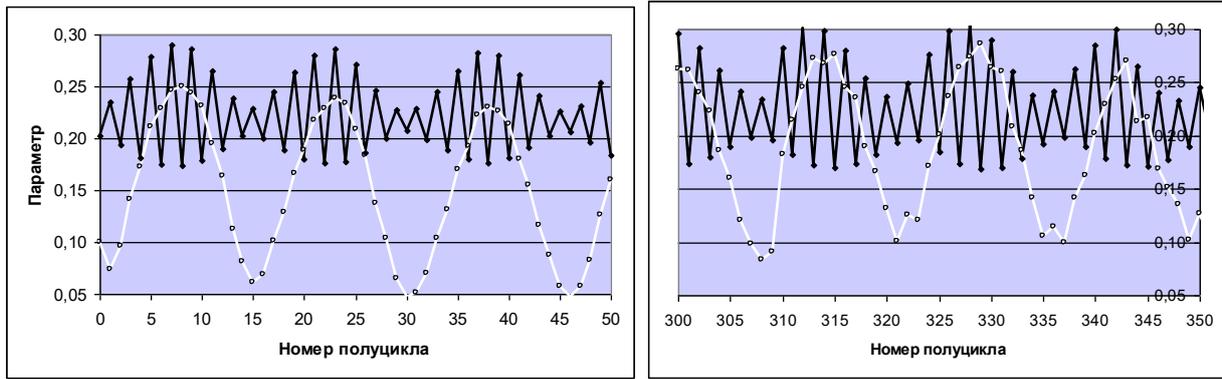


Рис. 5. Величины радиуса в точках апсид (◆ м·10¹¹) и эксцентриситета (○) от времени обращения Карме

Серия расчётов для Ананке позволила получить набор орбитальных параметров для периода осреднения 25005 сут. (40 оборотов Ананке), достаточно близкий к литературным данным (см. таб. 2). При этом период обра-

щения линии узлов составил 26182 сут. Расчёты движения Ананке были начаты 20.05.1999, из перицентра. Долгота восходящего узла – $\Omega = 7,6^\circ$, аргумента перицентра $\omega = 100,6^\circ$, наклонение орбиты $i = 148,9^\circ$.

Таблица 2

Орбитальные элементы Ананке

Большая полуось, м·10 ¹⁰	Эксцентриситет	Сидерический период обращения, сут.	Примечания
2,12	0,170	631,0	[23]
2,1276	0,244	610,5	[24]
2,1276	0,244	629,8	[25]
2,0439	0,2435	629,77	[26]
2,09	0,252	620,9	[27]
2,1222	0,18	629,8	Исходные данные для расчёта
2,1504	0,19	629,8	Результаты расчёта

Ещё одной проблемой, исследованной с использованием данной модели, был захват Землей внешнего небесного тела. Она интересна не только специалистам в области астрономии и небесной механики, но и широким слоям населения, имея ввиду возможные последствия такой встречи. В данном случае было исследовано влияние параметров движения небесного тела в момент его входа в сферу тяготения Земли на траекторию его движения.

Нужно вспомнить, что ещё Лапласом было введено понятие сферы действия в связи с изучением движения комет при их сближении с планетами. При этом, под сферой действия понимается та область пространства, в которой планета выполняет роль центрального тела, сообщающего комете ускорение силы тяготения [28, с. 309]. Радиус сферы действия по Лапласу определяется уравнением:

$$\Delta_1 = r_1 \left(\frac{m^2}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi}} \right)^{1/5}, \quad (15)$$

где r_1 – радиус-вектор планеты относительно Солнца, m – масса планеты в единицах масс Солнца, φ – угол между направлениями из центра планеты на комету и на Солнце.

Для Земли, вычисленный по данному уравнению радиус сферы действия, изменяется в диапазоне от $7,92 \cdot 10^8$ до $9,40 \cdot 10^8$ м в зависимости от расстояния между Землей и Солнцем и выбранного направления. Таким образом, орбита Луна оказывается внутри сферы действия Земли.

Как следует из уравнения (15) граница между сферами тяготения Солнца и Земли проходит на расстоянии, определяемом соотношением между m_E/r_{EB}^3 и $m_S \cos \beta / r_{BS}^3$, где индекс B относится к небесному телу. В зависимости от положения тела (пробной точки) относительно радиус-вектора Солнце-Земля радиус сферы тяготения изменяется от $2,09 \cdot 10^9$ м в соединении (0° относительно радиус-вектора) до $2,15 \cdot 10^9$ м в оппозиции (180° относительно радиус-вектора).

$$g_{h,N} = Gm_T \left(\frac{\sin \theta'}{r'^2} - \frac{\sin \theta}{r^2} \right). \quad (17)$$

Воспользовавшись формулами:

$$r'^2 = r^2 - 2rR \cos \theta + R^2,$$

где R – радиус Земли,

$$\sin \theta' = \frac{r}{r'} \sin \theta$$

и учитывая, что $r \gg R$, получаем приближённые формулы для вычисления эффектов, которые вполне сопоставимы с доступной точностью экспериментов:

$$g_{v,N} = 3 \frac{R}{r^3} Gm_T (\cos^2 \theta - 1/3), \quad (18)$$

$$g_{h,N} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{r^3} Gm_T \sin 2\theta. \quad (19)$$

$g_{v,N}$ принимает максимальные значения, равные 0,110 мГал для Луны и 0,051 мГал для Солнца² при 0 и 180° и минимальные значения – -0,055 мГал для Луны и -0,025 мГал для Солнца при 90 и 270°. Таким образом, суммарная амплитуда колебаний величины ускорения свободного падения может достигать 0,24 мГал.

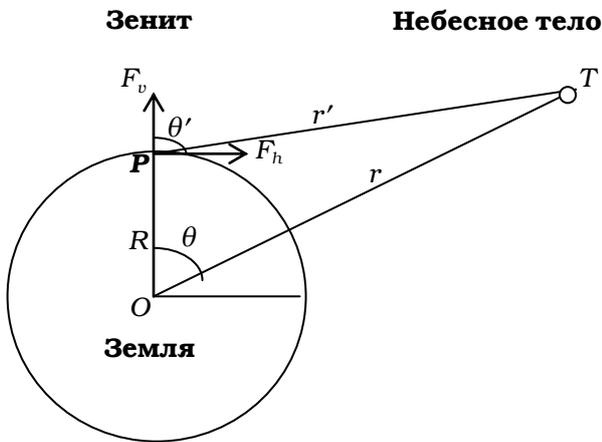


Рис. 8. Схема для описания гравитационного эффекта небесных тел

Величину g_h оценивают по отклонению направления вектора ускорения свободного падения. Расчётную величину

$$\psi = g_h / g_E, \quad (20)$$

где g_E – ускорение свободного падения, выражают в угловых секундах. $g_{h,N}$ принимает максимальные значения, равные 0,017” для

Луны и 0,008” для Солнца, при 45 и 225° и минимальные значения – -0,017” для Луны и -0,008” для Солнца при 135 и 315°. Таким образом, суммарная амплитуда колебаний направления ускорения свободного падения может достигать 0,050 угловых секунд.

Поскольку ось собственного вращения Земли расположена под углом 66,5° к плоскости эклиптики, то процесс, при котором угол θ изменяется от 0 до 180°, принципиально не возможен. Если угол $\theta = 0$ в полдень для Солнца на широте 23°, но в полночь он составит не 180, а 133°. Промежуточные значения θ нужно вычислять используя трёхмерную модель. Результаты расчётов величины ψ на широте 30° в день осеннего равноденствия, в новолуние представлены на рис. 9.

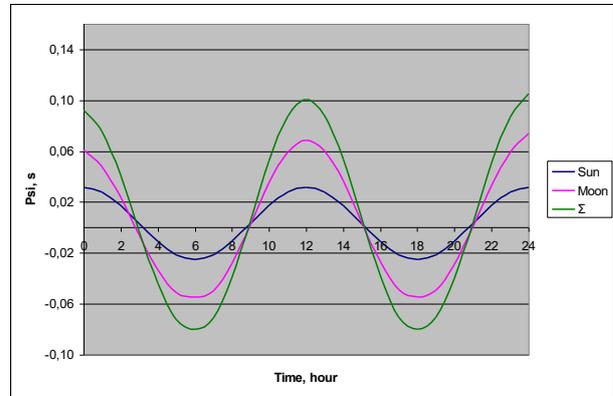


Рис. 9. Расчётный почасовой ход величины ψ на широте 30° (осеннее равноденствие, новолуние)

Но в эксперименте такую красивую зависимость получить не удаётся, потому что приливные гравитационные эффекты маскируются эффектами различных сейсмических явлений (изменение силы тяжести при перемещении на 1 м высоты составляет 0,3 мГал [30, с. 21]). На рис. 10 представлены графики наблюдений за наклоном отвеса, выполненные на сейсмической станции «Талгар» (Тянь-Шань) в 1968 г.

Что бы из подобных результатов наблюдений выделить эффекты, связанные с влиянием Луны и Солнца используют гармонический анализ (преобразования Фурье).

Попытки экспериментально определить приливные вариации напряжённости гравитационного поля Земли относятся ещё к XVIII веку, но приборы, обладающие необходимой чувствительностью, появились лишь в конце XIX века. Согласно современным измерениям отношение экспериментально определённой амплитуды изменения величины наклонных

² 1 Гал (Галилей) = 1 см/с².

приливных гравитационных эффектов к расчётной, обозначаемой как γ , составляет $0,653 \pm 0,012$ для меридиональной составляющей и $0,683 \pm 0,007$ – для широтной [32, с. 275].

Эти расхождения между теорией и экспериментом позволили предположить, что их причиной является растяжение земной коры

под влиянием Луны, и что приливы происходят не только в океане, но и в твёрдой оболочке Земли [33]. Впоследствии эти предположения оформились в теорию упругих деформаций Земли, которая, по мнению некоторых учёных (см., например, [34]), полностью согласуется с результатами измерений.

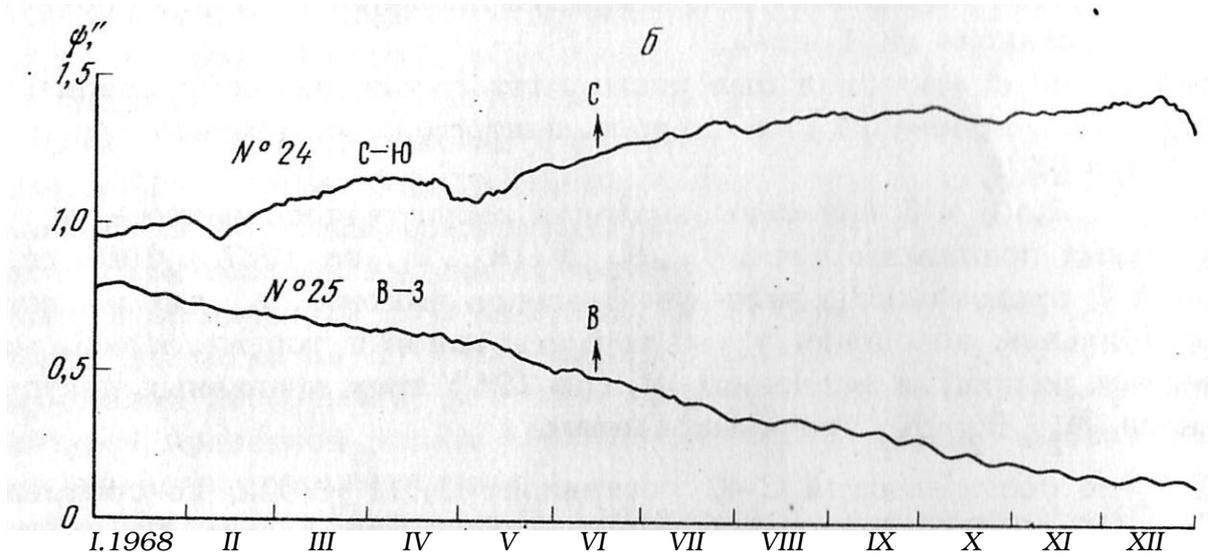


Рис. 10. Общий ход наклона ψ за 1968 год по составляющим С-Ю и В-З [31]

Если мы распространим подход, использованный в моделировании движения Луны и спутников Юпитера (см. уравнение (13), на пробную точку на поверхности Земли, то получим:

$$F_{G,4} = Gm_P r_{PE} \left[\frac{m_E}{r_{PE}^3} + \frac{m_M \cos(r_{PE}, r_{PM})}{r_{PM}^3} + \frac{m_S \cos(r_{PE}, r_{PS})}{r_{PS}^3} \right], \quad (21)$$

где индекс P относится к пробной точке, E – к Земле, M – к Луне и к S – Солнцу.

Вариации силы тяжести будут определяться вторым и третьим членами уравнения (21). Диапазон изменения g_v составит для Луны от $-0,057$ до $+0,053$ мГал, а для Солнца – от $-0,025$ до $+0,025$ мГал. Сравнение с результатами вычислений, приведёнными выше, показывает, что эффект, предсказываемый уравнением (21), составляет 0,61 от эффекта, вычисленному по уравнению (18) для Солнца и 0,52 – эффекта для Луны [35].

Логично предположить, что влияние на направление ускорения свободного падения будет определяться тангенциальными составляющими:

$$g_h = Gr_{PE} \left[\frac{m_M \sin(r_{PE}, r_{PM})}{r_{PM}^3} + \frac{m_S \sin(r_{PE}, r_{PS})}{r_{PS}^3} \right]. \quad (22)$$

Тогда амплитуда колебаний ψ будет $0,011''$ для Солнца и $0,023''$ для Луны; общая – $0,034''$. Соотношение между ψ , вычисленной по уравнению (22), и ψ , вычисленной по уравнению (19), составляет 0,688 – для Солнца, 0,676 – для Луны, 0,68 – для суммарного эффекта, что в пределах погрешности совпадает с величиной γ .

Таким образом, если при расчётах приливных гравитационных эффектов пользоваться уравнениями (21) и (22) необходимость в теории упругих деформаций Земли и предположений о том, что приливные деформации Луны приведут к её разрушению, отпадает.

Одним из направлений освоения космического пространства стала Луна. С 1958 г. состоялось 78 запусков космических аппаратов (КА) к Луне, значительная часть которых завершилась переходом КА на окололунную орбиту или посадкой на поверхность Луны [36]. Полученные данные слежения за движе-

нием КА позволили приступить к разработке моделей гравитационного поля Луны, но за прошедшие 60 лет проблема не нашла своего окончательного решения. Определение границ сферы тяготения Луны или сферы её действия в определении Лапласа имеет ключевое значение при проектировании перелётной орбиты, т.к. на ней происходит смена небесного тела, которое является для КА центральным и, вместе с тем, происходит изменение углового момента его движения.

Сферу действия Луны можно рассчитать по уравнению (15), подставив в него массу Луны, выраженную в массах Земли. Вычисленные при этом значения радиуса сферы действия Луны находятся в диапазоне от $5,45 \cdot 10^7$ до $6,98 \cdot 10^7$ м в зависимости от направления радиус-вектора пробной точки и радиуса орбиты Луны. Данный подход, однако, оказался не востребован при освоении космоса в связи с неточностями при расчётах ускорения силы тяготения.

Более точные результаты могут быть получены путём введения в уравнение Ньютона возмущающей функции, учитывающей воздействие внешних тел. Первая модель Э.Л. Акима, опубликованная в 1966 г., содержала 11 коэффициентов [37], а модель М.Р. Ananda, вышедшая в 1977 г., уже включала полиномы 20-го порядка [38]. Всего по состоянию на 1984 г. насчитывалось более 33 различных моделей гравитационного поля Луны [39].

По сути, все эти модели являются одно-типными и аппроксимационными. По мере появления новых данных появляются и новые модели. Работа [40] содержит уравнение для вычисления гравитационного потенциала в окрестностях Луны для точки с координатами r , φ и λ :

$$V(r, \varphi, \lambda) = \frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \bar{P}_n^m(\sin \varphi) \times (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \quad (23)$$

где r , φ и λ – радиус, широта и долгота, μ – гравитационная постоянная, a – средний радиус небесного тела, \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} – полностью нормализованные коэффициенты Стокса, $\bar{P}_n^m(\sin \varphi)$ – функция Лежандра степени n и порядка m .

Но вопрос о границах сферы тяготения Луны ни в одной из работ не рассматривается. Это связано с тем, что модели создаются

на основе наблюдений за движением искусственных спутников Луны, удалённость которых от поверхности Луны не превышает нескольких сот километров.

Ответ на подобный вопрос мы уже искали, рассматривая задачу захвата Землей внешних небесных тел. Как следует из уравнения (13) граница между сферами тяготения Луны и Земли должна проходить на расстоянии, определяемом соотношением между $m_E \cos \alpha_E / r_{PE}^3$ и m_M / r_{PM}^3 , где индекс P относится к пробной точке. Для вычисления напряжённости гравитационного поля Луны (ускорения силы тяготения) мы должны использовать уравнение, аналогичное уравнению (21):

$$g_M = Gr_{PM} \left(\frac{m_M}{r_{PM}^3} + \frac{m_S \cos \alpha_S}{r_{PS}^3} + \frac{m_E \cos \alpha_E}{r_{PE}^3} \right) \quad (24)$$

где α_S – угол между r_{PM} и r_{PS} , α_E – угол между r_{PM} и r_{PE} .

Расчёты показали [41], что по форме сфера тяготения Луны напоминает эллипсоид вращения, хотя его сечение не в полной мере отвечает условию эллиптичности кривой. А именно, оно несколько уширено, так что отношение длины радиус-вектора пробной точки при угле 90° относительно радиус-вектора Луна-Земля к вычисленному значению фокального параметра эллипса находится в диапазоне от 1,024 (Луна в перигее) до 1,041 (Луна в апогее).

Размеры сферы тяготения Луны увеличиваются по мере её удаления от Земли. Если в перигее Луны большая полуось эллипсоида равна $8,85 \cdot 10^7$ м, а малая – $8,60 \cdot 10^7$ м (эксцентриситет 0,237), то в апогее большая полуось эллипсоида равна $9,90 \cdot 10^7$ м, а малая – $9,63 \cdot 10^7$ м (эксцентриситет 0,232). Перигеум эллипсоида находится в соединении с Землёю, а апоцентр – в оппозиции к ней (см. рис. 11).

Сопоставление с границами «сферы действия» Луны, найденными по уравнению (15), обнаруживает существенные различия. «Сфера действия» Луны также представляет собой эллипсоид, но Луна находится не в фокусе эллипса, а в его центре. Большая ось эллипса перпендикулярна радиус-вектору Луны относительно Земли. Размеры «сферы действия» значительно меньше. Соотношение радиусов изменяется от 0,8, когда пробная точка находится в соединении с Землёю, до

0,5, когда пробная точка находится в оппозиции к Земле.

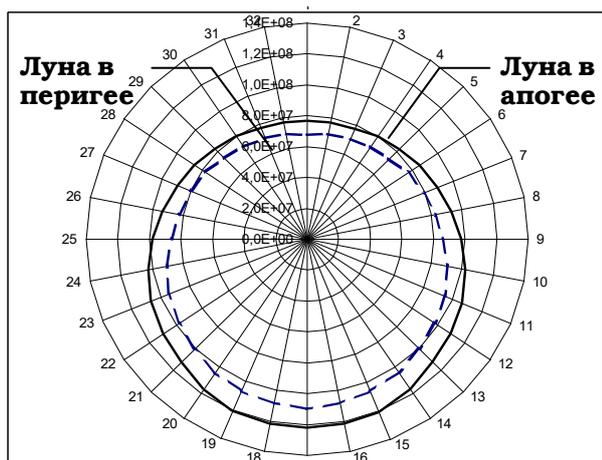


Рис. 11. Зависимость радиуса сферы тяготения Луны от расстояния между Луной и Землёй и величины угла EMP (радиус в м, одно деление окружности – $\pi/16$)

Величина напряжённости гравитационного поля на границе сферы тяготения равна нулю, когда пробная точка находится в соединении с Землёю. Затем она начинает возрастать и достигает максимума при угле поворота относительно радиус-вектора Луна-Земля 135° . Далее следует минимум при угле поворота 180° (см. рис. 12). С увеличением размеров сферы действия Луны напряжённость поля на его границе уменьшается. Внутри сферы тяготения напряжённость поля может быть вычислена по уравнению (23).

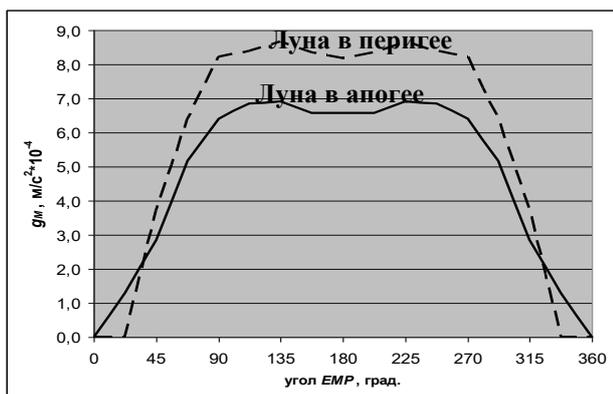


Рис. 12. Напряжённости гравитационного поля Луны на его границах

5. Обобщённое уравнение гравитационного взаимодействия

Если обобщить уравнения (21) и (22) то можно сформулировать следующий закон: в системе n тел, тело 1 будет тяготеть к телу 2, если выполняются соотношения:

$$\frac{m_2}{r_{12}^3} > \frac{m_i}{r_{1i}^3}. \tag{25}$$

Сила тяготения тела 1 к телу 2 описывается уравнением:

$$F_{12} = Gm_1r_{12} \sum_{i=2}^n \frac{m_i \cos(\vec{r}_{12}, \vec{r}_{1i})}{r_{1i}^3}. \tag{26}$$

При $n = 2$ уравнение (26) превращается в уравнение (1).

Попробуем теперь подвести под это уравнение теоретическую базу.

В современной теории гравитации используется понятие гравитационного потенциала [42, с. 5]:

$$V = A/m = GM/r, \tag{27}$$

который связан с величиной работы A , необходимой для того, что бы удалить тело с массой m , находящееся на расстоянии r от тела с массой M , на бесконечно большое расстояние.

С использованием гравитационного потенциала может быть введена величина напряжённости гравитационного поля (численно равной ускорению силы тяжести) [42, с. 17]:

$$g = -\text{grad}V. \tag{28}$$

Если гравитационный потенциал – скаляр, то напряжённость гравитационного поля уже вектор, направленный в сторону тела с массой M . Рассмотрим теперь систему, в которой тело m_1 находится в поле $n-1$ тел с массами m_i . Из уравнения (27) следует, что суммарный гравитационный потенциал в точке нахождения тела m_1 будет:

$$V_\Sigma = G \sum_{i=2}^n \frac{m_i}{r_{1i}}, \tag{29}$$

а напряжённость гравитационного поля:

$$|\vec{g}_\Sigma| = -G \sum_{i=2}^n \frac{m_i}{r_{1i}^2}. \tag{30}$$

Но каким будет меняться направление вектора \mathbf{g}_Σ в пространстве? Для этого мы должны найти его дивергенцию:

$$\text{div } \mathbf{g}_\Sigma = \frac{G}{2} \sum_{i=2}^n \frac{m_i}{r_{1i}^3}. \tag{31}$$

На рис. 13 представлены зависимость $\log_{10}|\text{div } \mathbf{g}_\Sigma|$ для системы Солнце-Земля от рас-

стояния пробной точки до Солнца. Оно связано с расстоянием от пробной точки до Земли соотношением (в м): $r_{1S} = 1,496 \cdot 10^{11} - r_{1E}$. Экстремум данной функции приходится на величину $r_{1S} = 1,4747 \cdot 10^{11}$ м ($r_{1E} = 2,129 \cdot 10^9$ м). При меньших значениях r_{1S} стоком вектора \mathbf{g} является Солнце, при больших – Земля.

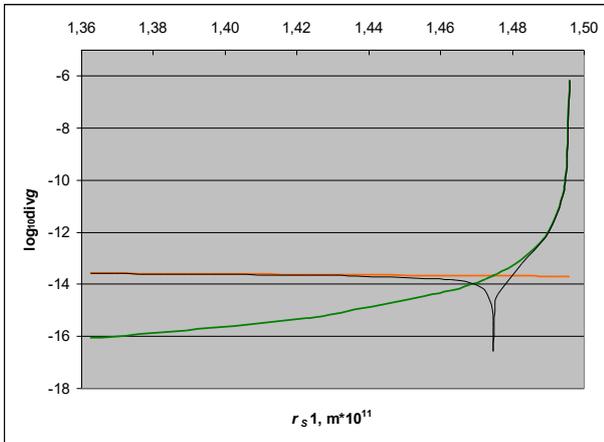


Рис. 13. Зависимость дивергенции напряжённости гравитационного поля на линии Земля – Солнце в зависимости от расстояния от Солнца (– логарифм модуля дивергенции напряжённости поля, – компонента Земли, – компонента Солнца).

Для того, что бы вернуться от $\text{div } \mathbf{g}$ к \mathbf{g} мы должны провести интегрирование. Но интегрирование необходимо выполнить не по всему пространству, а в области той точки, для которой сток вектора \mathbf{g} максимален. Мы присвоили данной точке индекс 2 (см. рис. 14).

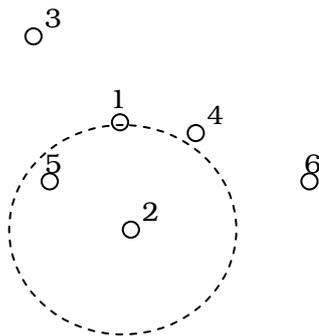


Рисунок 14. Область интегрирования $\text{div } \mathbf{g}$ для нахождения \mathbf{g}_{12} .

В результате мы получим следующее выражение для силы тяготения, действующей на тело 1:

$$\vec{F}_{12} = Gm_1 \vec{r}_{12} \sum_{i=2}^n \frac{m_i}{r_{1i}^3}. \quad (32)$$

Это уравнение я назвал обобщённым уравнением гравитационного взаимодействия.

В заключении необходимо обратить внимание на ещё один момент. Уравнение Ньютона (1), описывающее парные гравитационные взаимодействия, согласуется с третьим законом Ньютона: сила действия равна силе противодействия. В случае использования обобщённого уравнения гравитационного взаимодействия такой параллели нет. Силы F_{21} не существует. Аналогичную картину мы наблюдаем и в случае сил магнитного взаимодействия между токами, описываемыми законами Ампера (см. рис. 15).

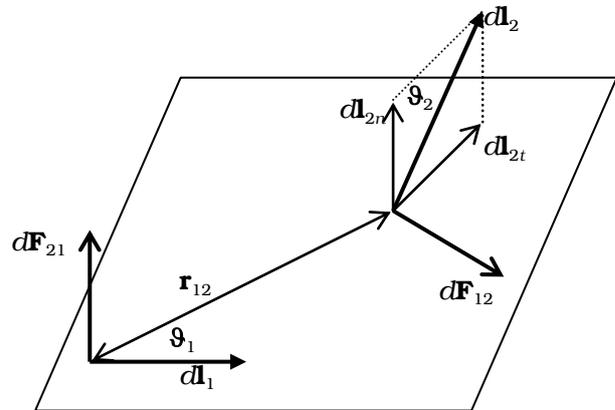


Рисунок 15. Магнитное взаимодействия между элемента тока $d\mathbf{l}_1$ и $d\mathbf{l}_2$.

Сила $d\mathbf{F}_{12}$, с которой элемент проводника $d\mathbf{l}_1$ действует на элемент проводника $d\mathbf{l}_2$, направлена перпендикулярно к последнему и лежит в плоскости, содержащей $d\mathbf{l}_1$ и \mathbf{r}_{12} . Сила $d\mathbf{F}_{21}$, с которой элемент проводника $d\mathbf{l}_2$ действует на элемент проводника $d\mathbf{l}_1$, направлена перпендикулярно к последнему и лежит в плоскости, содержащей $d\mathbf{l}_2$ и \mathbf{r}_{21} . При этом модули силы определяется уравнениями [43, с. 175]:

$$\begin{aligned} dF_{12} &= k_F \frac{i_1 dl_1 i_2 dl_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2}{r_{12}^2}, \\ dF_{21} &= k_F \frac{i_1 dl_1 i_2 dl_2 \sin \varphi_3 \sin \varphi_4}{r_{21}^2}, \end{aligned} \quad (33)$$

где: i_1 и i_2 – сила тока в элементах проводников; φ_1 – угол между $d\mathbf{l}_1$ и \mathbf{r}_{12} , φ_2 – угол между $d\mathbf{l}_2$ и нормалью к плоскости, содержащей $d\mathbf{l}_1$ и \mathbf{r}_{12} , φ_3 – угол между $d\mathbf{l}_2$ и \mathbf{r}_{21} , φ_4 – угол между $d\mathbf{l}_1$ и нормалью к плоскости, содержащей $d\mathbf{l}_2$ и \mathbf{r}_{21} .

Таким образом $F_{12} \neq F_{21}$. Впрочем, и в случае парных гравитационных взаимодействий

у нас нет никаких экспериментальных доказательств, что Земля действует на Солнце с той же силой, что и Солнце на Землю, что Луна действует на Землю с той же силой, что и Земля на Луну. Но я не беру под сомнение справедливость третьего закона Ньютона. Рассматривая и магнитные, и гравитационные взаимодействия мы игнорируем среду, посредством которой эти взаимодействия передаются от одного тела к другому. Т.е., что бы проверить справедливость третьего закона Ньютона мы должны найти силу, с которой каждое из тел, действует на среду, и силу, с которой среда действует на рассматриваемое тело.

Но подобный анализ дело будущего. Пока же придётся ограничиться уравнением, которое содержит непосредственно измеряемые величины. Как было показано, оно вполне удовлетворительно описывает все известные нам явления, связанные с гравитационными взаимодействиями.

Библиографические ссылки

1. Арнольд В.И.: **Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук – первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов.** Наука, Москва. (1989).
2. Климишин И.А.: **Астрономия наших дней.** Наука, Москва. (1986).
3. Ньютон И.: **Математические начала натуральной философии.** Наука, Москва (1989).
4. Субботин М.Ф.: Астрономические работы Леонарда Эйлера. **Леонард Эйлер: сборник статей в честь 250-летия со дня рождения, представленных академии наук СССР.** Издательство АН СССР, Москва. 292 (1958).
5. Аксёнов Е.П.: **Теория движения искусственных спутников Земли.** Наука, Москва. (1977).
6. Островский Н.В.: Модель орбитального движения небесных тел. *Естественные и технические науки*, **2**, 22–25 (2003).
7. Островский Н.В.: Модель орбитального движения небесных тел. Система трёх тел. *Актуальные проблемы современной науки*, **2**, 85–87 (2005).
8. Спасский Б.И.: **История физики: учебное пособие для вузов, часть 1.** Высшая школа, Москва. (1977).
9. Митишов Е.А., Берестова С.А.: **Теоретическая механика: статика, кинематика, динамика.** Институт компьютерных исследований, Москва - Ижевск. (2005).
10. Островский Н.В.: **Свойства эллиптических орбит.** *Спутник-плюс, Москва.* (2018).
11. Кудрявцев С.М.: Новое аналитическое представление эфемерид больших планет Солнечной системы. *Доклады академии наук*, **4756(1)**, 29–33 (2017).
12. **Физический энциклопедический словарь.** Советская энциклопедия, Москва. (1983).
13. Онлайн-служба эфемерид. ИПА РАН.
URL: <https://scicom.ru/wwm2>
14. Chapront J., Francou G.: Ephemerides of planets between 1900 and 2100 (1998 update). Bureau des Longitudes, Group: Dynamics of Solar System (1996).
URL: <https://scicom.ru/cgi8>
15. Островский Н.В.: Решение задачи трех тел на примере системы Солнце-Земля-Луна. **Материалы V Всероссийской научно-технической конференции «Современные проблемы математики и естествознания».** Нижегородский государственный технический университет, Нижний Новгород. 4–5 (2003).
16. Островский Н.В.: Моделирование захвата Землёю небесного тела. *Интернет-конференция "Информационно-вычислительные технологии в науке"*.
URL: <https://scicom.ru/1mdl>
17. Аллен К.У.: **Астрофизические величины.** Мир, Москва. (1977).
18. **Астрономический календарь, переменная часть, 1985.** Наука, Москва. (1984).
19. **Астрономический календарь, переменная часть, 1986.** Наука, Москва. (1985).
20. Островский Н.В.: Физическая модель движения спутника Юпитера Пасифе. *Труды государственного астрономического института им. П.К. Штернберга*, **LXXV**, 236–237 (2004).
21. Ostrovski N.V.: Physical model of the orbital movement of the Jupiter satellite Sinope. **Gamov Memorial International Conference dedicated to 100-th anniversary of George Gamov "Astrophysics after Gamov – theory and observations". Abstracts.** *Astroprint, Odessa.* 124–125 (2004).
22. Островский Н.В.: Физическая модель движения спутника Юпитера Карме. *Интернет-конференция "Информационно-вычислительные технологии в фундаментальных и прикладных физико-математических исследованиях"*.
URL: <https://scicom.ru/19nu>
23. Банышикова М.А., Авдюшев В.А.: Численное моделирование динамики спутников Юпитера. *Известия высших учебных заведений. Физика*, **49(2)**, 1–10 (2006).

24. Shepard S.S.: Moons of Jupiter. Carnegie Science.
URL: <https://scicom.ru/xi8z>
25. Jewitt D.C., Sheppard S.S., Porco C.: Jupiter's outer satellites and Trojans. **The planet, satellites and magnetosphere**. Cambridge University Press. 263–280 (2004).
26. Ананке (спутник). Википедия.
URL: <https://scicom.ru/zvjb>
27. Nesvorny D., Alvarillos J.L.A., Dones L., Levison H.D.: Orbital and collisional evolution of the irregular satellites. *The astronomical journal*, **126**. 398–429 (2003).
28. Чеботарёв А.Г.: **Аналитические и численные методы небесной механики**. Наука, Москва - Ленинград. (1965).
29. Цубои Тсюдзи: **Гравитационное поле Земли**. Мир, Москва. (1982).
30. Веселов К.Е., Сагитов М.У.: **Гравиметрическая разведка**. Недра, Москва. (1968).
31. Фандюшина С.М.: Приливные наклоны на Тянь-Шане. **Изучение приливных деформаций Земли**. Наука, Москва. 72–81 (1973).
32. Юзефович А.П., Огородова Л.В.: **Гравиметрия: учебник для вузов**. Недра, Москва. (1980).
33. Медунин А.Е.: **Развитие гравиметрии в России**. Наука, Москва. (1967).
34. Копаев А.В.: Лунно-солнечные приливы в астрономии и геодинатике. *Труды государственного астрономического института им. П.К. Штернберга*, **LXXV**. 229 (2004).
35. Островский Н.В.: Влияние Луны и Солнца на напряжённость гравитационного поля у поверхности неупругой Земли. *Омский научный вестник*, **48**. 5–8 (2006).
36. Исследования Луны. Википедия.
URL: <https://scicom.ru/yjh7>
37. Аким Э.Л.: Определение поля тяготения Луны по движению ИСЛ «Луна-10». *Доклады академии наук СССР*, **170**. 799–802 (1966).
38. Ananda M.P.: Lunar gravity; a mass point model. *Journal Geophysics research*, **82**. 3049–3084 (1977).
39. Кислюк В.С.: Эллипсоид инерции Луны. *Кинематика и физика небесных тел*, **1**. 41–48 (1985).
40. Vilana E.C.: Study of spacecraft orbits in the Gravity field of the moon. A dissertation submitted to the Department of Aerospace Engineering - Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya.
URL: <https://scicom.ru/vqps>
41. Островский Н.В.: О геометрии гравитационного поля Луны. *Символ науки*, **(2)**. 6–11 (2019).
42. Антонов В.А., Тимошенко Е.И., Холшевников К.В.: **Введение в теорию Ньютоновского потенциала**. Наука, Москва. (1988).
43. Калашников С.Г.: **Электричество: учебное пособие**. Наука, Москва. (1964).

References

1. Arnold V.I.: **Huygens and Barrow, Newton and Hooke - the first steps of mathematical analysis and catastrophe theory, from involutes to quasicrystals**. Nauka, Moscow. (1989).
2. Klimishin I.A.: **Astronomy of our days**. Nauka, Moscow. (1986).
3. Newton I.: **Mathematical principles of natural philosophy**. Nauka, Moscow. (1989).
4. Subbotin M.F.: Astronomical works of Leonhard Euler. **Leonhard Euler: collection of articles in honor of the 250th anniversary of the birth, presented to the Academy of Sciences of the USSR**. Publishing house of the USSR Academy of Sciences, Moscow. 292 (1958).
5. Aksyonov E.P.: **Theory of motion of artificial satellites of the Earth**. Nauka, Moscow. (1977).
6. Ostrovsky N.V.: Model of the orbital motion of celestial bodies. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, **2**. 22–25 (2003).
7. Ostrovsky N.V.: Model of the orbital motion of celestial bodies. System of three bodies. *Aktualnye problemy sovremennoy nauki*, **2**. 85–87 (2005).
8. Spassky B.I.: **History of physics: textbook for universities, part 1**. Vysshaya shkola, Moscow. (1977).
9. Mityushov E.A., Berestova S.A.: **Theoretical mechanics: statics, kinematics, dynamics**. Institute of computer researches, Moscow-Izhevsk. (2005).
10. Ostrovsky N.V.: **Properties of elliptical orbits**. Sputnik-plus, Moscow. (2018).
11. Kudryavtsev S.M.: New analytical representation of the ephemerides of the major planets in the solar system. *Doklady Physics*, **62**. 366–370 (2017).
12. **Physical encyclopedic dictionary**. Soviet Encyclopedia, Moscow. (1983).
13. Ephemeris Online Service. Institute of Applied Astronomy. Russian Academy of Science.
URL: <https://scicom.ru/wwm2>
14. Chapront J., Francou G.: Ephemerides of planets between 1900 and 2100 (1998 update). Bureau des Longitudes, Group: Dynamics of Solar System (1996).
URL: <https://scicom.ru/cgi8>
15. Ostrovskiy N.V.: The solution of the three-body problem by the example of the Sun-Earth-Moon system. **Proceedings of the Fifth All-Russian**

- Scientific and Technical Conference "Modern Problems of Mathematics and Natural Science". Nizhny Novgorod State Technical University, Nizhny Novgorod. 4–5 (2003).**
16. Ostrovsky N.V.: Modeling of capture by Earth of a celestial body. *Internet conference "Information and computing technologies in science"*. URL: <https://scicom.ru/1mdl>
 17. Allen C.W.: **Astrophysical quantities. Third edition.** The Athlone Press, University of London. (1973).
 18. **Astronomical calendar, variable part, 1985.** Nauka, Moscow (1984).
 19. **Astronomical calendar, variable part, 1986.** Nauka, Moscow. (1985).
 20. Ostrovskiy N.V.: Physical model of movement of Jupiter's satellite Passiphe. *Trudy gosudarstvennogo astronomicheskogo instituta imeni P.K. Shternberga*, **LXXV**. 236–237 (2004).
 21. Ostrovski N.V.: Physical model of the orbital movement of the Jupiter satellite Sinope. **Gamov Memorial International Conference dedicated to 100-th anniversary of George Gamov "Astrophysics after Gamov – theory and observations". Abstracts.** *Astroprint, Odessa*. 124–125 (2004).
 22. Ostrovsky N.V.: Physical model of the movement of the Jupiter satellite Karme. *Internet conference "Information and computing technologies in fundamental and applied physical and mathematical research"*. URL: <https://scicom.ru/19nu>
 23. Banyshchikova M.A., Avdyushev V.A.: Numerical modeling of the dynamics of Jupiter satellites. *Izvestiya vysshikh uchebnykh savedeniy. Physics*. 2006, **49(2)**. 1–10 (2006).
 24. Shepard S.S.: Moons of Jupiter. Carnegie Science. URL: <https://scicom.ru/xi8z>
 25. Jewitt D.C., Sheppard S.S., Porco C.: Jupiter's outer satellites and Trojans. **The planet, satellites and magnetosphere.** Cambridge University Press. 263–280 (2004).
 26. Ananke (satellite). Wikipedia. URL: <https://scicom.ru/zvjb>
 27. Nesvorniy D., Alvarillos J.L.A., Dones L., Levison H.D.: Orbital and collisional evolution of the irregular satellites. *The astronomical journal*, **126**. 398–429 (2003).
 28. Chebotarev A.G.: **Analytical and numerical methods of celestial mechanics.** Nauka, Moscow-Leningrad. (1965).
 29. Tsuboi Shuji: **The Earth's gravitational field.** Mir, Moscow. (1982).
 30. Veselov K.E., Sagitov M.U.: **Gravimetric exploration.** Nedra, Moscow. (1968).
 31. Fandyushina S.M.: Tidal slopes on the Tien Shan. **Study of tidal deformations of the Earth.** Nauka, Moscow. (1973).
 32. Yuzefovich A.P., Ogorodova L.V.: **Gravimetry: tutorial for universities.** Nedra, Moscow. (1980).
 33. Medunin A.E.: **Development of gravimetry in Russia.** Nauka, Moscow. (1967).
 34. Kopaev A.V.: Lunar-solar tides in astronomy and geodynamics. *Trudy gosudarstvennogo astronomicheskogo instituta imeni P.K. Shternberga*, **LXXV**. 229 (2004).
 35. Ostrovsky N.V.: Influence of the Moon and Sun on the intensity of the gravitational field at the surface of the inelastic Earth. *Omskiy Nauchny Vestnik*, **48**. 5–8 (2006).
 36. Exploration of the Moon. Wikipedia. URL: <https://scicom.ru/yjh7>
 37. Akim E.L.: Determination of the moon's gravitational field by the movement of the moon's satellite "Luna-10". *Doklady Akademii nauk SSSR*, **170**. 799–802 (1966).
 38. Ananda M.P.: Lunar gravity; a mass point model. *Journal Geophysics research*, **82**. 3049–3084 (1977).
 39. Kislyuk V.S.: Ellipsoid of inertia of the moon. *Kinematika i fizika nebesnykh tel*, **1**. 41–48 (1985).
 40. Vilana E.C.: Study of spacecraft orbits in the Gravity field of the Moon. A dissertation submitted to the Department of Aerospace Engineering - Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya. URL: <https://scicom.ru/vqps>
 41. Ostrovsky N.V.: On the geometry of the Moon's gravitational field. *Symvol nauki*, **2**. 6–11 (2019).
 42. Antonov V.A., Timoshenkova E.I., Kholshchevnikov K.V.: **Introduction to the theory of the Newtonian potential.** Nauka, Moscow. (1988).
 43. Kalashnikov S.G.: **Electricity: a study guide.** Nauka, Moscow. (1964).